Soluti CSC104 - 17-8

Partiel

Ex 1

a) $A^* = A$ donc $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$ c'à d $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$

donc $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

$A^* = -A$ donc $\overline{a_{ji}} = -a_{ij}$ c'à d $\overline{a_{ii}} = -a_{ii}$

$\overline{a_{ii}} + a_{ii} = 0$ donc $Re(a_{ii}) = 0$ c'à d a_{ii} est

imaginaire purs

b) $A = (a_{ij})$ une matrice triangulaire, on suppose pour fixer les idees que $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$.

on a $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ ou $-a_{ji}$

$\Rightarrow a_{ji} = 0 \ \forall i < j$. et comme $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$ alors

A est diagonale

Ex 2

a) On rappelle que $\forall x, y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = {}^t x y = {}^t y x$.

${}^t x A x = {}^t x B x + {}^t x C x$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x C x = -{}^t x {}^t C x$ car ${}^t C = -C$.

$$\left.\begin{aligned} {}^t x C x &= -{}^t x {}^t C x \\ &= -{}^t(Cx)\, x = -\langle Cx, x \rangle \\ &= -\langle x, Cx \rangle \\ &= -{}^t x C x \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}^t x C x = 0$$

d'où $\operatorname{tr} A_n = \operatorname{tr} B_n$

ainsi $\operatorname{tr} A_n > 0$ ssi $\operatorname{tr} B_n > 0$

et A est D.P ssi B est D.P.

9

b)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & & 0 \\ c & a & b & & \\ 0 & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{bmatrix}$$

3

Et1:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \frac{c}{a} & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

1 opérat°

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a - \frac{bc}{a} & b & & \\ \vdots & c & & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

2 opérations

après n-1 opérations on a $3(n-1)$ opérations.

il ft que A soit symetrique c=b et d.p ③

donc $d_i > 0 \ \forall i$

$a > -2b\cos\frac{i\pi}{n+1} \ \forall i$

il suffit de prendre $a > -2b\cos\frac{n\pi}{n+1}$

car $\forall i = 1-n \quad \frac{i\pi}{n+1} \leq \frac{n\pi}{n+1}$

$\cos\frac{i\pi}{n+1} \geq \cos\frac{n\pi}{n+1}$

$-2b\cos\frac{i\pi}{n+1} \leq -2b\cos\frac{n\pi}{n+1}$

si $a > -2b\cos\frac{n\pi}{n+1}$ alors $a > -2b\cos\frac{i\pi}{n+1} \ \forall i = 1 \ldots n$

et $d_i > 0$.

2

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & 0 \\ b & a & b & & \\ & b & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{pmatrix}$$

Et1 : $A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & b/\sqrt{a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-\frac{b^2}{a} & b & & \\ \vdots & & c & a & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a \end{pmatrix}$

1 racine, 1 division

$a - \frac{b^2}{a} = a - \frac{b}{\sqrt{a}}\frac{b}{\sqrt{a}}$ 2 opérat

on a 4 opération

après n-1 étapes on a 4(n-1) opérat°

à la nième étape on fait 1 opération

Total = 4n-3 opérations

1

-)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 18 & 18 \\ 0 & 8 & 18 & 21 \end{bmatrix} \longrightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1}=1 \end{bmatrix}.$$

3

$A = C^t C$ avec $C = A_4$.

$|A| = |C|^2 = 4 \times 9 = 36.$

2

on peut arrêter la factorisation de cholesky si on tve la racine carré d'un nombre négatif pendant le calcul d'un élément diagonal.

1